

3.1、运输问题的数学模型

在经济建设中，经常会遇到大宗物资调拨中的运输问题。如煤炭、钢铁、木材、粮食等物资，在全国有若干生产基地，根据已有的交通网，应如何制定调运方案，将这些物资运到各消费地点，而使总运费最小。这类问题可用以下数学语言来描述：

运输问题：假设有 m 个生产地点，可以供应某种物资(以后称为产地)，用 A_i 表示， $i=1,2,\dots,m$ ；有 n 个销售地，用 B_j 表示， $j=1,2,\dots,n$ ；产地的产量和销售地的销售量分别为 $a_i, i=1,2,\dots,m$ 和 $b_j, j=1,2,\dots,n$ ，从 A_i 到 B_j 运输单位物资的运价为 c_{ij} ，这些数据可汇总于如表3.1。

表3.1

销地 产地	B_1	B_2		B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
.....					
A_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2		b_n	

要求使总运费最小的调运方案。

如果运输问题的总产量等于其总销量，即

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

则称该运输问题为产销平衡运输问题；反之，称为产销不平衡运输问题。

下面建立在产销平衡情况下的运输问题的数学模型。

解：假设 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 的运量，则所求的数学模型为：

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ &\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_{ij} \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

在该模型中，目标函数表示运输总费用，要求其极小化；第一个约束条件的意义是由各产地运往某一销地的物品数量之和等于该销地的销量；第二个约束条件表示由某一产地运往销地的物品数量之和等于该产地的产量；第三个约束条件表示变量的非负条件。

对于产销不平衡的情况，我们将另行处理。
这就是运输问题的数学模型，它包含 $m \times n$ 个变量， $m + n$ 个约束条件，是一个线性规划问题。如果用单纯形法求解，首先应在每个约束条件上加入一个人工变量(以便求出初始基可行解)。因此，即使是 $m = 4$ ， $n = 5$ 这样的简单问题，变量个数就有29个之多，利用单纯形法进行计算是非常复杂的。因此，我们有必要针对运输问题的某些特点，来寻求更为简单方便的求解方法。

3.2、表上作业法

1、表上作业法的基本概念与重要结论

针对运输问题的数学模型结构的特殊性，它的约束方程组的系数矩阵具有如下特点：

- (1) 在该矩阵中，它的元素等于0或1；
- (2) 每列只有两个元素为1，其余都是0；
- (3) 对应于每一个变量，在前 m 个约束方程中只出现一次，在后 n 个约束方程中也只出现一次。根据这个特点，在单纯形法的基础上，下面设计出一种专门用来求解运输问题的方法，这种方法我们称为表上作业法。

$$\begin{array}{c}
 x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn} \\
 A = \begin{bmatrix}
 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

根据运输问题的数学模型求出的运输问题的解，它代表着一个运输方案，其中每一个变量 x_{ij} 的值表示由 A_i 调运数量为 x_{ij} 的物品给 B_j 。由于运输问题也是一个线性规划问题，当用单纯形法进行求解时，我们首先应当知道它的基变量的个数；其次，要知道这样一组基变量应当是由哪些变量来组成。运输问题的解 X 必须要满足模型中的所有约束条件；基变量对应的约束方程组的系数列向量必须是线性无关的；解中基变量应由 $m+n-1$ 个变量组成(即基变量的个数 = 产地个数 + 销售地个数 - 1)，原因是在运输问题中虽然有 $m+n$ 个约束条件，但由于总产量等于总销量，故只有 $m+n-1$ 个约束条件是线性独立的。进一步我们想知道，怎样的 $m+n-1$ 个变量会构成一组基变量？

为此我们需要引入一些基本概念，通过对这些基本概念的分析 and 讨论，结合单纯形算法的基本结果，便可得出我们所需要的结论。

凡是能排成 $x_{i_1 j_1}, x_{i_1 j_2}, x_{i_2 j_2}, x_{i_2 j_3}, \dots, x_{i_s j_s}, x_{i_s j_1}, (i_1, \dots, i_s, \text{互不相同}, \text{且}$

$1 \leq i_k \leq m, \quad k = 1, \dots, s, j_1, \dots, j_s \text{互不相同, 且 } 1 \leq j_l \leq n, l = 1, \dots, s)$

形成的变量的集合称之为一个闭回路。而把出现在闭回路中的变量称为这个闭回路的顶点。

例3.1 设 $m = 3, n = 4$ ，如表3.2所示。

例3.1 设 $m = 3$, $n = 4$, 如表3.2所示。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	x_{11}	x_{12}		
A_2	x_{21}			x_{24}
A_3		x_{32}		x_{34}

x_{11} 、 x_{12} 、 x_{32} 、 x_{34} 、 x_{24} 、 x_{21} 构成一个闭回路。这里有： $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_3 = 2$; $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$ 。若把闭回路的顶点在表中画出，并且把相邻两个变量用一条直线相连（今后就称这些直线为闭回路的边）。而表3.3，即顶点为 $\{x_{12}$ 、 x_{32} 、 x_{34} 、 $x_{14}\}$ 和表3.4，即顶点为 $\{x_{11}$ 、 x_{12} 、 x_{22} 、 x_{24} 、 x_{34} 、 $x_{31}\}$ 也分别构成两个闭回路。

表3.3

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1		x_{12}	←	x_{14}
A_2		↓		↑
A_3		x_{32}	→	x_{34}

表3.4

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	x_{11}	x_{12}		
A_2		x_{22}		x_{24}
A_3	x_{31}			x_{34}

从上面的例子中不难看出，如果把一个闭回路的所有顶点都在表中画出，并且把相邻的顶点都用一条直线连接起来，就可以得到一条封闭的折线，折线的每一条边或者是水平的，或者是垂直的。

定理3.1: $m+n-1$ 个变量 $x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_sj_s}$ ($s = m+n-1$) 构成基变量的充分必要条件是它不包含有任何闭回路。

该定理给出了运输问题基的一个重要特征，这个结论是非常重要的，因为利用它可以判断 $m+n-1$ 个变量是否构成基变量，它比直接判断这些变量所对应的系数列向量组是否线性无关要简单和直观。另外，在以后还将看到利用基的这个特征可以导出求运输问题的基本可行解的一种简便的方法。

2、表上作业法

表上作业法是单纯形法在求解运输问题时的一种简化方法，其实质是单纯形算法。只是具体计算和术语有所不同，可归纳为：

(1) 找出初始基可行解，即在 $(m \times n)$ 产销平衡表上给出 $m+n-1$ 个有数字的格，这些有数字的格不能构成闭回路，且行和等于产量，列和等于销售量；

(2) 求各非基变量的检验数，即在表上求出空格的检验数，判别是否达到最优解。如果达到最优解，则停止计算，否则转入下一步；

(3) 确定换入变量和换出变量，找出新的基可行解，在表上用闭回路法进行调整。

(4) 重复 (2)、(3) 步，直到求得最优解为止。以下我们就具体给出求解运输问题表上作业法的计算步骤。

(1)、确定初始基可行解

确定初始基可行解即首先给出初始的调运方案，方法很多，我们只介绍其中的两种方法：

① 方法一：最小元素法：

最小元素法的基本思想就是就近供应。即从单位运价表中最小的运价开始确定产销关系，依次类推，直到给出初始方案为止。下面由例题来说明最小元素法确定初始基可行解的具体步骤。

例3.2：某公司有3个生产同类产品的工厂，生产的产品由4个销售点销售，各工厂的生产量、各销售点的销售量以及各工厂到各销售点的单位产品运价如表3.5所示。问该公司应如何调运产品，在满足各销售点的需要量的前提下，使总的运费为最小。

表3.5

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

解：第一步：从单位运价表中找出最小运价为1，这表示先将 A_2 的产品供应给 B_1 。由于 A_2 每天生产4吨， B_1 每天只需要3吨，即 A_2 除每日能满足 B_1 的需要外还余1吨。因此在产销平衡表 (A_2, B_1) 交叉处填上3，表示 A_2 调运3吨给 B_1 ，再在单位运价表中将 B_1 这一列运价划去，表示 B_1 的需求已满足，不需要继续调运 (即 $x_{21} = 3 = \min(a_2, b_1) = \min(4, 3)$)。

第二步: 从上述未划去的单位运价表的元素中找出最小的运价2, 即 A_2 把剩余的产品供应给 B_3 ; B_3 每天需要5吨, A_2 只剩余1吨, 因此在上述产销平衡表的 (A_2, B_3) 交叉处填上1, 划去上述运价表中 A_2 这一行运价, 表示 A_2 的产品已分配完毕。

表3.6

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

第三步: 从上述第二步所得的单位运价表未划去的元素中找出最小元素为 3。这表示将 A_1 的产品供应 B_3 , A_1 每天生产 7 吨, B_3 尚缺 4 吨, 因此在产销平衡表的 (A_1, B_3) 交叉处填上 4, 由于 B_3 的需求已满足, 将单位运价表中的 B_3 这一列运价划去。如此, 一步步进行下去, 直到单位运价表中所有元素都划去为止, 最终在产销平衡表上就可以得到一个初始调运方案。这个方案的总运费为 86 元, 如表 3.7 所示。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4	3	7
A_2	3		1		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

应当注意的是，在用最小元素法确定初始基可行解的时候，有可能出现以下的两种特殊情况：

一是当在中间步骤的未划去的单位运价表中寻找最小元素时，有多个元素同时达到最小，这时从这些最小元素中任意选择一个作为基变量；二是当在中间步骤的未划去的单位运价表中寻找最小元素时，发现该元素所在行的剩余产量等于该元素所在列的剩余销售量。这时在产销平衡表相应的位置填上一个数，而在单位运价表中就要同时划去一行和一系列。为了使调运方案中有数字的格仍为 $(m + n - 1)$ 个，需要在同时划去的行或列的任一空格位置添上一个“0”，这个“0”表示该变量是基变量，只不过它取值为0，即此时的调运方案是一个退化的基可行解。

例3.3：某公司有3个生产同类产品的工厂，生产的产品由4个销售点销售，各工厂的生产量、各销售点的销售量以及各工厂到各销售点的单位产品运价如表3.8所示。利用最小元素法，求该公司的初始调运方案。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	5	3	10	4	9
A_2	1	6	9	6	4
A_3	20	10	5	7	7
销量	3	5	8	4	

解：第一步：从单位运价表中找出最小运价为1，这表示先将 A_2 的产品供应 B_1 。由于 A_2 每天生产4吨， B_1 每天只需要3吨，因此在产销平衡表 (A_2, B_1) 交叉处填上3，同时将单位运价表中的 B_1 这一列运价划去。

第二步：从上述未划去的单位运价表的元素中找出最小的运价3，即 A_1 的产品供应给 B_2 ； B_2 每天需要5吨，由于 A_1 每天生产9吨，因此在上述产销平衡表的 (A_1, B_2) 交叉处填上5，划去上述运价表中 B_2 这一列运价。

第三步：从上述第二步所得的单位运价表未划去的元素中找出最小元素为4。这表示将 A_1 把剩余的产品供应给 B_4 ； B_4 每天需要4吨， A_1 正好剩余4吨，因此在上述产销平衡表的 (A_1, B_4) 交叉处填上4，这时 A_1 的产品已分配完毕，同时 B_4 的需求已满足，因此划去上述运价表中 A_1 这一行和 B_4 这一列运价。

为了使有数字的格不减少，(有数字的格的总数应为 $m + n - 1$ 个)可以在空格 (A_1, B_1) 、 (A_1, B_3) 、 (A_2, B_4) 、 (A_3, B_4) 中任选一个格添加一个“0”；同样，这个添加的“0”格当作基变量，取值为0。这里我们在 (A_1, B_3) 处填0（即初始调运方案是一个退化的基可行解），表示为基变量。

如此，进行下去，直到单位运价表中所有元素都划去为止，最终在产销平衡表上就可以得到一个初始调运方案。如表3.9、表3.10所示。

表3.9

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	5	3	10	4	9
A_2	1	6	9	6	4
A_3	20	10	5	7	7
销量	3	5	8	4	

表3.10

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		5	0	4	9
A_2	3		1		4
A_3			7		7
销量	3	5	8	4	

② 方法二、伏格尔法：

最小元素法的缺点是，为了节省一处的费用，有时造成在其它地方要花多几倍的运费。伏格尔法考虑到，一产地的产品，假如不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费。这就有一个差额，差额越大，说明不能按最小运费调运时，运费增加就越多。因此，对于差额最大处，就优先采用最小运费调运。我们还是用例3.2 来说明伏格尔法的具体实施过程，步骤如下：

第一步：在单位运价表中增加一行和一列，列的格位置相应填入该行的次小运费与最小运费之差，我们称之为行差额。行的格位置相应填入该列的次小运费与最小运费之差，我们称之为列差额。如此可得表3.10：

表3.10

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	行差额
A_1	3	11	3	10	0
A_2	1	9	2	8	1
A_3	7	4	10	5	1
列差额	2	5	1	3	

第二步：从行差额和列差额中选出最大者，选择它所在的行或列中的最小元素。比较该元素所在的行和列的产量，取它们最小者填入产销平衡表相应的位置。同时在单位运价表中划去一行或一列。由于 B_2 的列差额最大。 B_2 列中最小元素为 4（即 A_3 行），可确定 A_3 产品优先供应 B_2 。比较它们的产量和销量，可知在单位运价表中划去 B_2 列。在产销平衡表的 (A_3, B_2) 空格处填入 6。

第三步：对上述未划去的元素再比较出各行、各列的差额。重复第一、二步的工作，直到给出初始解为止。

本问题利用伏格尔方法给出的初始调运方案如下表3.11所示。

表3.11

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

由以上可见：伏格尔方法同最小元素法除在确定供求关系的原则上不同外，其余步骤相同，因而给出的初始调运方案也是基可行解。且一般来说，用伏格尔方法比用最小元素法所求出的初始解更接近于最优解。本例用伏格尔方法给出的初始解的总运费为 85 元。

(2)、最优解的判别

得到运输问题的初始基可行解后就要判别这个解是否为最优解，判别的方法是计算非基变量即空格的检验数。因运输问题的目标函数是要求实现最小化，所以当所有的非基变量检验数全都大于等于 0 时为最优解。下面介绍两种求空格检验数的方法。

①、方法一：闭回路法

在给出调运方案的计算表上，如表3.7，从每一空格出发，找一条闭回路。它是以空格为起点，用水平线或垂直线向前划，每碰到一数字格就转 90 度后继续前进。直到回到起始空格处为止。可以证明，每个空格都存在唯一的闭回路。(A1, B1) 空格与(A1, B4)、(A2, B4) 和 (A2, B1) 三个有数字的格构成一闭回路，如此等等。

闭回路计算检验数的经济解释为：在已给出初始解的表3.7中，可以从任一空格出发，如从 $(A1, B1)$ 出发，若让 $A1$ 的产品调 1 吨给 $B1$ ，为了保持产销平衡，就要依次作调整：在 $(A1, B3)$ 处减少 1 吨， $(A2, B3)$ 处增加 1 吨， $(A2, B1)$ 处减少 1 吨，即构成了以 $(A1, B1)$ 空格为起点，其它为有数字的格的闭回路。如表3.12中的直线所示。各顶点所在格的右上角的数字是单位运价。

可见这一调整方案使运费增加了：

$$(+1) \times 3 + (-1) \times 3 + (+1) \times 2 + (-1) \times 1 = 1 \text{ (元)}$$

这表明若这样调整运输方式将增加运费。将“1”这个数填入 $(A1, B1)$ 格，这就是检验数。

表3.12

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3 3 (+1)		4 4 (-1)	3	7
A_2	3 1 3 (-1)		1 2 1 (+1)		4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

按以上所述，就可以找出 所有空格的检验数，见如下表
3.13。

表3.13

空 格	闭 回 路	检验数
(A_1, B_1)	$(1,1) \rightarrow (1,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,1) \rightarrow (1,1)$	1
(A_1, B_2)	$(1,2) \rightarrow (1,4) \rightarrow (3,4) \rightarrow (3,2) \rightarrow (1,2)$	2
(A_2, B_2)	$(2,2) \rightarrow (2,3) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,4) \rightarrow (3,4) \rightarrow (3,2) \rightarrow (2,2)$	1
(A_2, B_4)	$(2,4) \rightarrow (2,3) \rightarrow (3,3) \rightarrow (1,4) \rightarrow (2,4)$	-1
(A_3, B_1)	$(3,1) \rightarrow (3,4) \rightarrow (1,4) \rightarrow (1,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,1)$	10
(A_3, B_3)	$(3,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (1,4) \rightarrow (1,3) \rightarrow (3,3)$	12

这时检验数还存在负数，因为 (A_2, B_4) 空格的检验数为-1，这说明表3.7给出的方案还不是最优解，还需要进一步改进，改进方法见本节后面的基可行解的改进方法。

②、方法二：位势法

用闭回路法求检验数时，需要给每一空格找一条闭回路。当产销点很多时，空格的数量很大，计算检验数将十分费时。下面介绍一种较为简便的方法——位势法。

设 $x_{i_1 j_1}, \dots, x_{i_s j_s}, (s = m + n - 1)$ 是一组基可行解，现在引进 $m+n$ 个未知量 $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ ，由上述基本可行解可构造如下一个方程组：

$$\begin{cases} u_{i_1} + v_{j_1} = c_{i_1 j_1} \\ u_{i_2} + v_{j_2} = c_{i_2 j_2} \\ \vdots \\ u_{i_s} + v_{j_s} = c_{i_s j_s} \end{cases}$$

其中 c_{ij} 为单位运价。方程组(3.1)共有 $m+n$ 个未知数和 $m+n-1$ 个方程。(3.1)的解存在且恰有一个自由变量。称 $u_1, \dots, u_m$ 为行位势, $v_1, \dots, v_n$ 为列位势。

定理3.2 设已给了一组基本可行解, 则对每一个非基变量 x_{ij} 来说, 它所对应的检验数为:

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

下面,我们就以例子来说明这种方法的具体实施过程。

仍以例3.2所给出的初始基可行解表3.7为例：第一步：在对应表3.7的数字格处填入单位运价如表3.14所示：

表3.14

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1			3 3	10 10
A_2	1 1		2 2	
A_3		4 4		5 5

第二步：在表3.14上增加一行和一列，列中填入行位势 u_i ，行中填入列位势 v_j 得表3.15。

先令 $u_1 = 0$ （行和列中基变量多的令为0），然后按 $u_i + v_j = c_{ij} \ (i, j) \in \text{基变量指标集}$ ，相继确定 u_i 、 v_j 。由表3.15可见， $u_1 = 0$ 时，由 $u_1 + v_3 = c_{13} = 3$ 可得 $v_3 = 3$ ，由 $u_1 + v_4 = c_{14} = 10$ ，可得 $v_4 = 10$ ；在 $v_4 = 10$ 时，由 $u_3 + v_4 = c_{34} = 5$ 可得 $u_3 = -5$ 。以此类推可确定所有的 u_i 、 v_j 的值。

表3.15

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	行位势 u_i
A_1			3 3	10 10	10
A_2	1 1		2 2		-1
A_3		4 4		5 5	-5
列位势 v_j	2	9	3	10	

第三步：按 $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$, $(i, j) \in \text{非基变量指标集}$ ，计算所有的空格检验数。如：

$$\sigma_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 3 - (0 + 2) = 1$$

$$\sigma_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 11 - (0 + 9) = 2$$

这些计算可直接在表3.15上进行。为了方便，特设计计算表，如表3.16。右上角框内的数为单位运价。

在表3.16中还有负的检验数，说明还未得到最优解，还得进一步进行改进。

表3.16

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	行位势 u_i
A_1	3 1	11 2	3 0	10 0	0
A_2	1 0	9 1	2 0	8 -1	-1
A_3	7 10	4 0	10 12	5 0	-5
列位势 v_j	2	9	3	10	

③、基可行解改进的方法——闭回路调整法

当计算所有的空格检验数时，出现了负检验数，这表明还未得到最优解。若有两个或两个以上的检验数为负时，一般选择其中最小的负检验数，以它对应的空格为调入格。即以它对应的非基变量为换入变量。由表3.16可知 **(A2, B4)** 为调入格（即以它对应的变量 **x₂₄** 为换入变量）。以此格为出发点，作一闭回路，如表3.17所示。

表3.17

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			4(+1)	3(-1)	7
A_2	3		1(-1)	(+1)	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

(A_2, B_4) 格的调入量 q 是选择闭回路上具有 (-1) 的数字格中的最小者。即 $q = \min\{1, 3\} = 1$ (其原理与单纯形法中按 q 规则来确定的换出变量是相同), 然后按闭回路上的正、负号, 加入和减去此值, 得到调整方案如表3.18所示。对表3.18给出的解, 再用闭回路法或位势法求各空格的检验数, 见表3.19, 这时表中的所有检验数全都大于等于 0, 所以表3.19所给出的解为最优解。这时得到的总运费的最小值是 85 元。

表3.18 解的调整表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			5	2	7
A_2	3			1	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表3.19 检验数表

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	2		
A_2		2	1	
A_3	9		12	

检验数都大于等于0，因此所得方案为最优方案。

应当指出的是，产销平衡的运输问题必定存在最优解。那么有唯一最优解还是无穷多个最优解？依据仍然是看非基变量（即空格处）的检验数是否有为0的。若有，则存在无穷多个最优解；否则，只有唯一最优解。由于表3.18可知，空格 (A1,B1)处的检验数为0，表明例3.2有无穷多个最优解。可在表3.18中以(A1,B1)为调入格，作闭回(A1,B1) $\rightarrow$ (A1,B4) $\rightarrow$ (A2,B4) $\rightarrow$ (A2,B1) $\rightarrow$ (A1,B1)。确定 $\theta = \min\{2, 3\} = 2$ ，经调整后得到另一个最优解，见表3.20。当然，我们的调入量可以是： $0 < \theta < 2$ 中的任一实数，这时的解仍为最优解，但不是基可行解（因为线性规划问题可以在顶点取到最优解，也可以是在非顶点即是边界点上取到最优解），本题如表3.21所示。

表3.20

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	2		5		7
A_2	1			3	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

表3.21

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	θ		5	$2 - \theta$	7
A_2	$3 - \theta$			$1 + \theta$	4
A_3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

3.3、产销不平衡的运输问题及其求解方法

前面讲的表上作业法，都是以产销平衡为前提的。但实际问题往往是不平衡的。这就需把产销不平衡的问题转化为产销平衡的问题。

当产大于销时，即 $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ 时，运输问题的数学模型可以写成：

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

由于总的产量大于销售量，就要考虑多余的物资在那一个产地贮存的问题。设 x_{in+1} 是产地 A_i 的贮存量，故有：

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + x_{in+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{in+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = b_{n+1}$$

令： $c'_{ij} = c_{ij}$ ，当： $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ 时；

$c'_{ij} = 0$ ，当： $i = 1, \dots, m, j = n + 1$ 时。

将其分别代入，得到：

$$\min Z' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i & (i=1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j=1, \dots, n, n+1) \\ x_{ij} \geq 0 & b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \end{cases}$$

这是一个产销平衡的运输问题。

类似地，当销大于产时，可以在产销平衡表中增加一个假想的产地 $i = m + 1$ ，该产地的产量为

$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ ，在单位运价表中令从该产地到各个销售地的单位运价为： $c_{m+1 j} = 0$ ，同样可以转化为产销平衡的运输问题。

$$\min Z' = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^n c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & (i = 1, \dots, m, m+1) \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \end{cases}$$

例3.4 设有三个化肥厂供应四个地区的农用化肥。假定等量的化肥在这些地区使用的效果相同。各化肥厂年产量、各地区年需要量及从各化肥厂到各地区运送单位化肥的运价表如表3.22所示。试求出总的运费最省的化肥调拨方案。

表3.22

单位运价：万元/万吨

需求 产地	I	II	III	IV	产量(万吨)
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	—	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

解：这是一个产销不平衡的运输问题，总产量为160万吨，四个地区的最低需求为110万吨，最高需求为无限。根据现有产量，第IV个地区每年最多能分配得到60万吨，这样最高需求就为210万吨，大于产量。为了求得平衡，在产销平衡表中增加一个假想的化肥厂 D ，其年产量为 50 万吨。由于各地区的需求量包含两部分，如地区1，其中 30 万吨是最低需求，故不能由假想化肥厂 D 供给，令相应的单位运价为 M （任意大的正数）；而另一部分 20 万吨满足或不满足均可以，因此可以由假想化肥厂 D 供给，按前述，可令相应的单位运价为0。对凡是需求分两种情况的地区，实际上可按照两个地区看待。这样可以写出这个问题的产销平衡表和单位运价表（表3.23）。并根据表上作业法，可以求得这个问题的最优解如表3.24所示。

产销平衡表

产地 \ 销地	I	I'	II	III	IV	IV'	产 量
A							50
B							60
C							50
D							50
销 量	30	20	70	30	10	50	

表3.23 单位运价表

产地 \ 销地	I	I'	II	III	IV	IV'
A	16	16	13	22	17	17
B	14	14	13	19	15	15
C	19	19	20	23	M	M
D	M	0	M	0	M	0

表3.24 最优调运方案

产地 销地	I	I'	II	III	IV	IV'	产 量
<i>A</i>			50				50
<i>B</i>			20		10	30	60
<i>C</i>	30	20	0				50
<i>D</i>				30		20	50
销 量	30	20	70	30	10	50	

由于在变量个数相等的情况下，表上作业法的计算远比单纯形法的计算简单得多，所以在解决实际问题时，人们常常尽可能把某些线性规划问题化为运输问题的数学模型。下面介绍如何把线性规划问题转化为运输问题，以例3.5作为一个典型的实例进行介绍。

例3.5 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供**10、15、25、20**台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如表**3.25**所示。又如果生产出来的柴油机当季不交货，每台每季度需存储费、维护费等共**0.15**万元。要求在完成合同的情况下，做出使该厂全年生产（包括储存、维护等）费用最小的决策。

表3.25

季 度	生产能力(台)	单位成本(万元)
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

解：由于每个季度生产出来的柴油机不一定当季交货，所以设 x_{ij} 表示为第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的柴油机数。根据合同要求，必须满足：

$$x_{11} = 10$$

$$x_{12} + x_{22} = 15$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 20$$

又每季度生产的用于当季和以后各季交货的柴油机数不可能超过该季度的生产能力，故又有：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 25$$

$$x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 35$$

$$x_{33} + x_{34} \leq 30$$

$$x_{44} \leq 10$$

第 i 季度生产的用于第 j 季度交货的每台柴油机的实际成本 c_{ij} 应该是该季度单位成本加上储存、维护等费用。 c_{ij} 的具体数值见表3.26。

表3.26

生产 \ 交货	I	II	III	IV
I	10.8	10.95	11.10	11.25
II		11.10	11.25	11.40
III			11.00	11.15
IV				11.30

设用 a_i 表示该厂第 i 季度生产能力, b_j 表示第 j 季度的合同供应量, 则问题可写成:

$$\min Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq a_i & (i=1, 2, 3, 4) \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} = b_j & (j=1, 2, 3, 4) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

显然这是一个产大于销的运输问题模型。注意到这个问题中当 $i > j$ 时, $x_{ij} = 0$, 所以应该令对应的 $c_{ij} = M$, M 是充分大的正数, 再加上一个假想的需求季份 II, 就可以把这个问题变成产销平衡的运输模型, 并写出产销平衡表和单位运价表 (合二为一, 见表3.27)。

表3.27 产销平衡表与单位运价表

生产 \ 销售	I	II	III	IV	V	产 量
I	10.8	10.95	11.10	11.25	0	25
II	M	11.10	11.25	11.40	0	35
III	M	M	11.00	11.15	0	30
IV	M	M	M	11.30	0	10
销 量	10	15	25	20	30	

经用表上作业法求解，可得多个最优方案，表3.28中列出最优方案之一。即第 I 季度生产 25 台，其中 10 台当季交货，15 台第 II 季度交货；第 II 季度生产 5 台用于第 III 季度交货；第 III 季度生产 30 台，其中 20 台当季交货，10 台用于第 IV 季度交货；第 IV 季度生产 10 台用于当季度交货。按此方案安排生产，可使该厂总的生产（包括储存、维护等）费用最省，即为 773 万元。

表3.28 最优调运方案

生产 \ 销售	I	II	III	IV	V	产 量
I	10	15	0			25
II			5		30	35
III			20	10		30
IV				10		10
销 量	10	15	25	20	30	

4.1 整数规划的数学建模

4.1.1 装箱问题

例4.1 某厂拟用集装箱托运甲、乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润以及托运所受限制如表4—1所示。问两种货物各托运多少箱，可使获得利润为最大？

表 4—1

货物	体积（米 ³ /箱）	重量（百公斤/箱）	利润（百元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24米 ³	13百公斤	

解： 设 x_1 、 x_2 分别为甲、乙两种货物的托运箱数，则数学模型可以表示为：

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}$$

其中，目标函数表示追寻最大的利润，约束条件分别表示装箱的体积和重量限制，决策变量要求装箱数必须为整数。

4.1.2 工厂选址问题

例4.2 某公司拟在市东、西、南三区建立门市部，有7个位置 $A_i (i=1,2,\dots,7)$ 可供选择，考虑到各地区居民消费水平及居民居住密集度，公司制定了如下规定：

在东区，由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选两个；

在西区，由 A_4, A_5 两个点中至少选一个；

在南区，由 A_6, A_7 两个点中至少选一个。

如选用点 A_i ，设备投资预计为 b_i 元，每年可获利润预计为 C_i 元，由于公司的投资能力及投资策略限制，要求投资总额不能超过 B 元。问应如何选择可使年利润为最大？

解：设 $x_i (i=1,2,\dots,7)$ 表示是否在位置 i 建立门市部，有

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } A_i \text{ 点被选用} \\ 0, & \text{当 } A_i \text{ 点没被选用} \end{cases} \quad i=1,2,\dots,7$$

则可以建立如下的数学模型：

$$\max z = \sum_{i=1}^7 c_i x_i$$

$$s.t \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^7 b_i x_i \leq B \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{array} \right.$$

其中，目标函数表示寻求获利最大的设点方案，第一个约束条件表示投资总额限制，之后的三个约束条件分别表示在东、西和南区的设点数限制，决策变量取值0或1。

4.2 分支定界算法

下面通过例子说明分支定界方法的算法思想和步骤。

例4.3 对如下整数规划

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 整数} \end{cases}$$

解：先不考虑整数条件，解相应的线性规划，得最优解： $x_1 = 4.81$, $x_2 = 1.82$, $z_0 = 356$ 。该解不符合整数条件。

对其中一个非整数变量解，如 $x_1 = 4.81$ ，显然，若要满足整数条件，必定有 $x_1 \geq 5$ 或 $x_1 \leq 4$

于是，对原问题增加两个新约束条件，将原问题分为两个子问题，即有

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$

$$(A) \quad s.t \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = 40x_1 + 90x_2$$

$$(B) \quad s.t \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

问题 (A) 和 (B) 的可行域中包含了原整数规划问题的所有整数可行解，而在 $4 < x_1 < 5$ 中不可能存在整数可行解。

分别求解这两个线性规划问题，得到的解是：

$$x_1 = 4, x_2 = 2.1, z = 349 \text{ 和 } x_1 = 5, x_2 = 1.57, z = 341$$

变量 x_2 仍不满足整数的条件，对问题 (A)，必有 $x_2 \geq 3$ 或 $x_2 \leq 2$ ，将 (A) 增加约束条件，得到

$$\max z = 40x_1 + 90x_2 \quad \max z = 40x_1 + 90x_2$$

$$s.t \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (A1) \quad s.t \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (A2)$$

求解 (A1)，得到 $x_1 = 4, x_2 = 2, z = 340$ ；
求解 (A2)，得到 $x_1 = 1.42, x_2 = 3, z = 327$ 。由于
(A2) 的最优值小于 (A1) 的最优值，原问题的最优值必大于等于 340，尽管 (A2) 的解仍然不满足整数条件，(A2) 已无必要继续分解。

对 (B)， x_2 不满足整数条件，必有
 $x_2 \geq 2$ 或 $x_2 \leq 1$ ，将这两个约束条件分别加到 (B)
中，得到 (B1) 和 (B2)，求解得到：(B1) 的
最优解为 $x_1 = 5.44, x_2 = 1, z = 308$ ，(B2) 无可行
解。至此，原问题的最优解为：

$$x_1 = 4, x_2 = 2, z = 340$$

上述求解过程称为分支定界算法。

步骤1：分支定界过程

分支过程。在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j ，若其值为 b_j ， $[b_j]$ 表示小于 b_j 的最大整数，构造两个约束条件： $x_j \leq [b_j]$ 和 $x_j \geq [b_j] + 1$ 。将这两个约束条件，分别加入问题 B ，得到后续规划问题 B_1 和 B_2 。不考虑整数条件求解这两个后续问题。

定界过程。以每个后续问题为一分支标明求解的结果，在其他问题解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界 $\bar{z}$ 。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值最大者作为新的下界 $\underline{z}$ ，若无可行解，则 $\underline{z} = 0$ 。

步骤2:

比较与剪支。各分支的最优目标函数中若有小于 $\underline{z}$ 者，则剪掉这支，以后不再考虑这个分支。若大于 $\underline{z}$ ，且不符合整数条件，则重复步骤1，直到最后得到 $z^* = \underline{z}$ 为止，得到最优整数解：

$$x_j^*, j = 1, \dots, n。$$

4.3 割平面方法

割平面法的思想是，求解不含整数条件的线性规划，然后不断增加适当的线性约束条件，割掉原可行域中不含整数可行解的一部分，最终得到一个具有整数坐标的极点的可行域，而该极点恰好是原整数规划问题的最优解。

例4.4 对如下整数规划

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \text{为整数} \end{cases}$$

下面通过例子求解过程说明割平面法的应用步骤。

步骤1: 不考虑整数条件, 引入松弛变量 x_3, x_4 , 化为标准形式, 用单纯形法求解得到:

表4—2

x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$
		0	0	$-1/2$	$-1/2$

最优解为: $x_1 = 3/4, x_2 = 7/4$ 。

步骤2:

根据单纯形表, 可得 $x_1 - 1/4x_3 + 1/4x_4 = 3/4$

将上式中 $-1/4$ 写成整数和非负真分数之和的形式, 有 $x_1 - x_3 + 3/4x_3 + 1/4x_4 = 3/4$

变换成如下形式: $x_1 - x_3 = 3/4 - 3/4x_3 - 1/4x_4$

该式中, 由于 x_1, x_3 为整数, $3/4x_3 + 1/4x_4$ 为整数, 必有 $3/4 - 3/4x_3 - 1/4x_4 \leq 0$ 化简得:

$$-3x_3 - x_4 \leq -3$$

对 $-3x_3 - x_4 \leq -3$ ，切割掉了非整数最优解，但是并没有切割掉整数解，因为相应的线性规划任意整数可行解都满足该条件，故称之为：“割平面”。

引入松弛变量，得到：

$$-3x_3 - x_4 + x_5 = -3$$

将此约束方程加到表4—2中，得到表4—3：

表4—3

x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$	0
x_5	-3	0	0	-3	-1	1
		0	0	$-1/2$	$-1/2$	0

由表4—3，可采用对偶单纯形法进行求解，
得到表4—4：

表4—4

x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1/3	1/12
x_2	1	0	1	0	0	1/4
x_3	1	0	0	1	-1	-1/3
		0	0	0	-1/3	-1/6

由表4—4, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$, 满足整数条件。

4.4 指派问题及匈牙利法

在生活中经常会遇到这样的问题：某单位需完成 n 项任务，恰好有 n 个人可承担这些任务。每个人只做一项工作，同时，每项工作只由一个人完成。由于每人的专长不同，各人完成任务所需的时间也不同。问题是，应指派哪个人去完成哪项任务，使完成项任务的总时间最小（或者总效率最高）？这类问题称为指派问题或分配问题（assignment problem）。

例4.6 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作E、J、G、R。现有甲乙丙丁四人。他们将中文说明书翻译成不同语种说明书所需时间如表4—6所示。问，若要求每一翻译任务只分配给一人去完成，每一个人只接受一项任务，应指派何人去完成何工作，使所需时间最少？

表 4—6

任务 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

一般地，称表4—6为效率矩阵或者系数矩阵，其元素 $c_{ij} > 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 表示指派第 i 个人去完成第 j 项任务所需的时间，或者称为完成任务的工作效率（或时间、成本等）。

解：引入0-1变量 x_{ij} ，

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{指派第} i \text{人去完成第} j \text{项任务} \\ 0, & \text{不指派第} i \text{人去完成第} j \text{项任务} \end{cases}$$

由此可得到指派问题的数学模型：

$$\min z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1, & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_j x_{ij} = 1, & i = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} = 1 \text{或} 0 \end{cases}$$

目标函数表示 n 个人完成任务所需的时间最少（或效率最高）；第一个约束条件说明第 j 项任务只能由1人去完成；第二个约束条件说明第 i 人只能完成1项任务。

易得，上述问题可行解 x_{ij} 可写成表格或矩阵形式，如例4.6的一个可行解矩阵是

$$(x_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回顾运输问题的数学模型，运输问题中若产量和销量分别等于1，实际上所得到的数学模型与指派问题相同，也即指派问题是运输问题的特例，因而可以用运输问题的表上作业法求解。本节利用指派问题的特点介绍一种更为简便的算法。

指派问题的最优解有这样的性质，若从系数矩阵 (c_{ij}) 的某一行（列）各元素中分别减去该行（列）的最小元素，得到新矩阵 (b_{ij}) ，那么以 (b_{ij}) 为系数矩阵求得的最优解和用原系数矩阵 (c_{ij}) 求得的最优解相同。

以例4.6来理解上述性质，对甲来说，只能完成一项任务，若其无论完成哪项任务都减少相同的时间，这种时间变动并不改变甲在四项任务中的最佳选择；若完成某项任务的四个人都减少相同的时间，同样，这种时间的节省并不改变任务对完成人的最佳选择。

利用这个性质，可使原系数矩阵变换为含有很多0元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。在新系数矩阵中，一般称位于不同行不同列的0元素为独立的0元素。若能在系数矩阵中找出个独立的0元素，令解矩阵中对应这个独立的0元素的元素取值为1，其他元素取值为0，则将其代入目标函数中得到的，它一定是最小，这就是以为系数矩阵的指派问题的最优解，也就得到了原问题的最优解。

1955年库恩（W.W.Kuhn）利用匈牙利数学家康尼格（D.Konig）一个关于矩阵中0元素的定理，提出了指派问题的解法，称为匈牙利法。该定理证明了以下结论：系数矩阵中独立元素0元素的最多个数等于能覆盖所有0元素的最小直线数。

- 下面用例4.6来说明该方法的应用步骤。

第一步：使指派问题的系数矩阵经变换，在各行各列中都出现0元素。

- （1）从系数矩阵的每行元素减去该行的最小元素；
- （2）再从所得系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

例4. 6的计算结果为:

$$\begin{array}{c}
 \min \\
 (c_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{matrix} = (b_{ij})
 \end{array}$$

4 2min

第二步：进行试指派，以寻求最优解。

经第一步变换后，系数矩阵中每行每列都已有了0元素；但需找出 n 个独立的0元素。若能找出，就以这些独立0元素对应解矩阵 (x_{ij}) 中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。当 n 较小时，可用观察法、试探法去找出 n 个独立0元素。若 n 较大时，就必须按一定的步骤去找，常用的步骤为：

(1) 从只有一个0元素的行（列）开始，给这个0元素加圈，记作 $\odot$ 。这表示对这行所代表的人，只有一种任务可指派。然后划去 $\odot$ 所在列（行）的其他0元素，记作 $\times$ 。这表示这列所代表的任务已指派完，不必再考虑别人。

(2) 给只有一个0元素列（行）的0元素加圈，记作 $\odot$ ；然后划去 $\odot$ 所在行的0元素，记作 Φ 。

(3) 反复进行（1），（2）两步，直到所有0元素都被圈出和划掉为止。

(4) 若仍有没有画圈的0元素，且同行（列）的0元素至少有两个（表示对这个可以从两项任务中指派其一）。则从剩有0元素最少的行（列）开始，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择0元素少的那列的这个0元素加圈（表示选择性多的要“礼让”选择性少的）。然后划掉同行同列的其他0元素。可反复进行，直到所有0元素都已圈出和划掉为止。

(5) 若 $\odot$ 元素的数目 m 等于矩阵的阶数 n ，那么指派问题的最优解已得到。若 $m < n$ ，则转入第三步。

按步骤 (1)，先给 b_{22} 加圈，然后给 b_{31} 加圈，划掉 b_{11}, b_{41} ；按步骤 (2)，给 b_{43} 加圈，划掉 b_{44} ，最后给 b_{14} 加圈，得到

$$\begin{bmatrix} \odot & 13 & 7 & \odot \\ 6 & \odot & 6 & 9 \\ \odot & 5 & 3 & 2 \\ \odot & 1 & \odot & \odot \end{bmatrix}$$

由于 $m = n = 4$, 所以得最优解为

$$(x_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这表示：指定甲译出俄文，乙译出日文，丙译出英文，丁译出德文，所需总时间最少

$$\min z_b = \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij} = 0$$

$$\min z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = c_{31} + c_{22} + c_{43} + c_{14} = 28$$

(小时)。

例4.7 求表4—7所示效率矩阵的指派问题的最小解。
表4—7

任务 人员	A	B	C	D	E
甲	12	7	9	7	9
乙	8	9	6	6	6
丙	7	17	12	14	9
丁	15	14	6	6	10
戊	4	10	7	10	9

解：按上述第一步，将这系数矩阵进行变换。

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

按第二步，得到：

$$\begin{bmatrix} 5 & \odot & 2 & \odot & 2 \\ 2 & 3 & \odot & \odot & \odot \\ \odot & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & \odot & \odot & 4 \\ \odot & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

这里 $\odot$ 的个数 $m = 4$ ，而 $n = 5$ ；解题没有完成，应按以下步骤继续进行。

第三步：作最少的直线覆盖所有0元素，以确定该系数矩阵中能找到最多的独立元素数。为此按以下步骤进行：

- (1) 对没有 $\odot$ 的行打 $\checkmark$ 号；
- (2) 对已打 $\checkmark$ 号的行中所有含 Φ 元素的列打 $\checkmark$ 号；
- (3) 再对打有 $\checkmark$ 号的列中含 $\odot$ 元素的行打 $\checkmark$ 号；
- (4) 重复(2)，(3)直到得不出新的打 $\checkmark$ 号的行、列为止；

(5) 对没有打 $\checkmark$ 号的行画一横线，有打 $\checkmark$ 号的列画一纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数。

令这直线数为 l 。若 $l < n$ ，说明必须再变换当前的系数矩阵，才能找到 n 个独立的0元素，为此转第四步：若 $l = n$ ，而 $m < n$ ，应回到第二步（4），另行试探。

在例4.7中，对矩阵按以下次序进行：

先在第五行旁打√号，接着在第一列打√号，接着在第三列旁打√号。经检查不能再打√号了。对没有打√行，画一直线以覆盖0元素，已打√的列画一直线以覆盖0元素。得

5	⊙	2	0	2	
2	3	0	⊙	0	
⊙	10	5	7	2	√
9	8	⊙	0	4	
0	6	3	6	5	√
√					

由此可见 $l = 4 < n$ 。所以应继续对矩阵进行变换，转第四步。

第四步：该步进行矩阵变换的目的是增加0元素。在没有被直线覆盖的部分中找出最小元素。然后在打√行各元素中都减去这最小元素，而在打√列的各元素都加上这最小元素，以保证原来0元素不变。这样得到新系数矩阵（它的最优解和原问题相同）。若得到个独立的0元素，则已得最优解，否则回到第三步重复进行。

在没有被覆盖部分（第3、5行）中找出最小元素为2，然后在第3、5行各元素分别减2，给第一列各元素加2，得到新矩阵。按第二步，找出所有独立的0元素，得到：

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & \odot & 2 & \odot & 2 \\ 4 & 3 & \odot & \odot & \odot \\ \odot & 8 & 3 & 5 & \odot \\ 11 & 8 & \odot & \odot & 4 \\ \odot & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

它具有 n 个独立的0元素。这就得到了最优解，相应的解矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由解矩阵得最优指派方案：甲—B，乙—D，丙—E，丁—C，戊—A。本例还可以得到另一最优指派方案：甲—B，乙—C，丙—E，丁—D，戊—A。所需总时间为 $\min z = 32$ 。

当指派问题的系数矩阵，经过变换得到了同行和同列中都有两个或两个以上0元素时，这时可以任选一行（列）中某一个0元素，再划去同行（列）的其他0元素。这时会出现多重解。

下面讨论几种特殊的情况，经过适当变换后，即可以采用匈牙利法求解。

(1) 目标函数求极大化的问题。对例4.6，若系数矩阵中各元素 C_{ij} 为翻译人员从事某种语言翻译工作后所得到的收益，要求一种指派，使翻译人员的收益最大，即求

$$\max z = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}$$

可令 $b_{ij} = M - C_{ij}$ ，其中 M 是足够大的常数（如选 C_{ij} 中最大元素为 M ），这时系数矩阵可变换为

$B = (b_{ij})$ ，这时 $b_{ij} \geq 0$ ，符合匈牙利法的条件。

目标函数经变换后，即解 $\min z' = \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij}$

所得最小解就是原问题最大解，因为：

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij} &= \sum_i \sum_j (M - c_{ij}) x_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j M x_{ij} - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\ &= nM - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \end{aligned}$$

因 nM 为常数，所以当 $\sum_i \sum_j b_{ij} x_{ij}$ 取最小时， $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ 即为最大。

(2) 任务数 m 与工作人员数 n 不等。当 $m > n$ 时，可设“虚工作人员”，虚工作人员从事各项任务的效率为0，分配给虚拟人的工作实际上无法安排；当 $m < n$ 时，可设“虚工作”，各工作人员从事虚工作的效率为0，被指派做虚拟工作的人的状态，实际是休息状态。此时，即可将问题得到转化。

若例4.6中，只有甲乙丙三个工作人员，则转化的矩阵为表4—8；

表 4—8

任务 \ 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
“虚工作人员”	0	0	0	0

表4-9:

任务 人员	E	J	G	虚工作
甲	2	15	13	0
乙	10	4	14	0
丙	9	14	16	0
丁	7	8	11	0

(3) 不平衡指派问题的扩展。三个工人从事四
项工作，某一工人从事二项工作，求花费时间最
小的指派。先不考虑“某一工人从事二项工作”，
则增加虚拟工作人员，得到最优指派后，剩余工
作必定由三人中完成该项任务花费时间最少的来
从事。基于此，可设“虚工作人员”，与(2)
不同的是，该虚工作人员完成任务的时间花费等
于，各项任务中三人的最少花费时间，该问题即
得到表4—10。用匈牙利法求解该问题，若虚工
作人员从事G工作，则表明，第四项工作由甲完
成；若虚工作人员从事J工作，表明第四项工作
由乙完成。

表4—10

任务 人员	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
虚工作人员	2	4	13	4

在不平衡指派问题中，在工人数大于工作数情况下，则增加虚工作：某人必须被指派工作。则该人从事虚工作的时间花费为“ M ”，表示工作花费时间无穷大，其余人从事该虚工作的时间花费为0。工人不能得到指派时存在一定赔偿损失费时，将各人得到的赔偿费作为从事该虚工作的时间花费。

当工作数大于工人数时，则增加虚工作人员：若某项工作必须完成，则该虚工作人员从事必须完成工作的时间花费为“ M ”，表示该项工作不得由虚工作人员从事，虚工作人员从事其它工作的时间花费为0；若工作不能完成时存在惩罚损失费时，则直接将惩罚费作为虚工作人员从事各项工作的时间；若某人不能完成某项工作，则在系数矩阵中，相应位置处填入“ M ”。